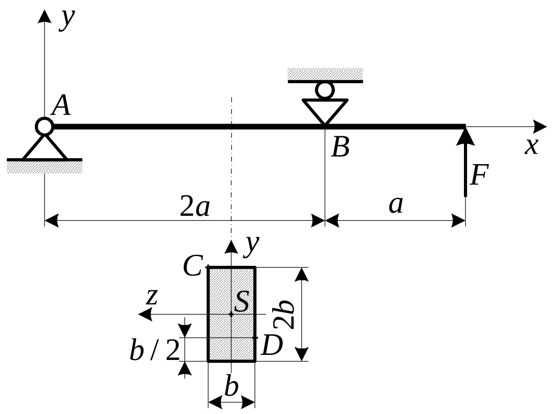
12. MECHANIKA-SZILÁRDSÁGTAN GYAKORLAT

(kidolgozta: dr. Nagy Zoltán egy. adjunktus; Bojtár Gergely egy. Ts.; Tarnai Gábor mérnöktanár.)

12.1. Prizmatikus rúd összetett igénybevétele (nyírás és hajlítás)

Adott: $a = 0{,}4\ \text{m}$, $b = 45\ \text{mm}$, $F = 16\ \text{kN}$, $\sigma_{meg} = 125\ \text{MPa}$.



Feladat:

a) Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat és határozza meg a veszélyes keresztmetszetet!

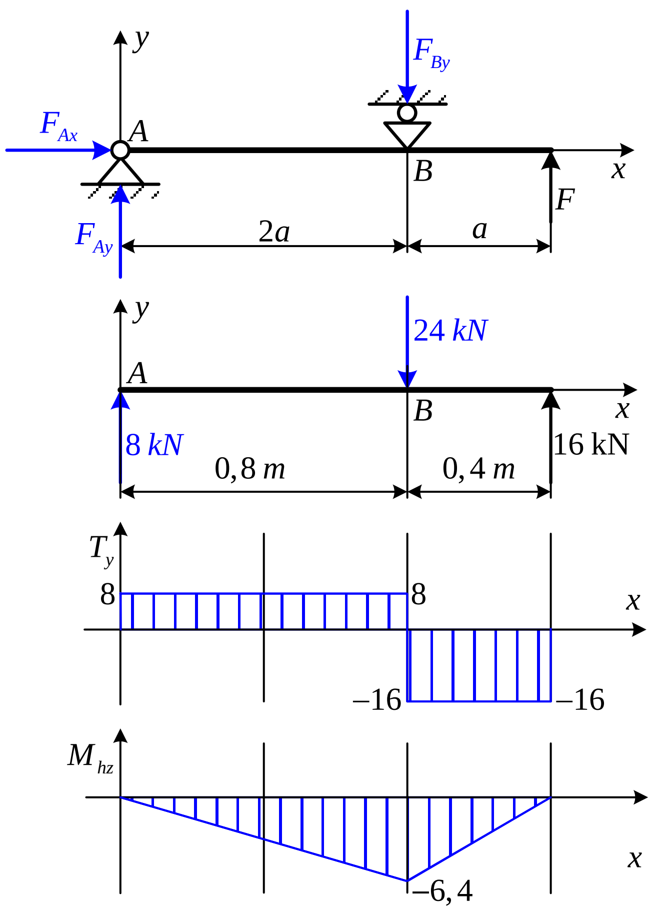
b) Rajzolja meg a veszélyes keresztmetszet y és z tengelye mentén a feszültségeloszlást!

c) Írja föl a feszültségi tenzort a veszélyes keresztmetszet S, C, D pontjaiban!

d) Végezze el a tartó szilárdságtani ellenőrzését a HMH elmélet szerint!

Megoldás:

a) Igénybevételi ábrák, a tartó veszélyes keresztmetszete:



$$M_b = aF - 2aF_{Ay} = 0,$$

$$F_{Ay} = \frac{aF}{2a} = \frac{F}{2} = \frac{16}{2} = 8\ \text{kN}\ (\uparrow),$$

$$M_a = 3aF - 2aF_{By} = 0,$$

$$F_{By} = \frac{3aF}{2a} = \frac{3F}{2} = \frac{3 \cdot 16}{2} = 24\ \text{kN}\ (\downarrow).$$

Veszélyes keresztmetszet: B^+

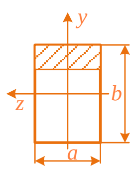
$$T_y(B^+) = -16\ \text{kN}\ (\downarrow),$$

$$M_{hz}(B^+) = -6{,}4\ \text{kNm}.$$

Csúsztató feszültség alapképletei:

$$\tau_{yx} = -\frac{T_y S_{1z}(y)}{I_z a(y)}$$

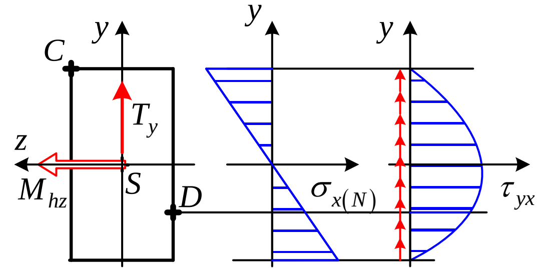
$$S_{1z} = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

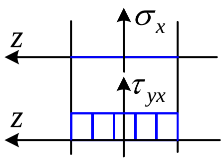


Normál feszültség:

$$\sigma_x = \frac{M_{hz}}{I_z} y.$$

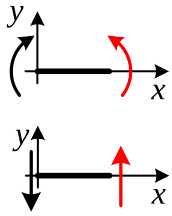
b) Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszet y és z tengelye mentén:





$M_{hz} = -6,4\ \text{kNm} \Rightarrow M_{hz} < 0$

$T_y = -16\ \text{kN} \Rightarrow T_y < 0$



c) A feszültségi tenzor a veszélyes keresztmetszet S,C,D pontjaiban:

$$I_z = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2b^4}{3} = \frac{2\cdot 45^4}{3} = 2\,733\,750\ \text{mm}^4, \qquad A = 2b^2 = 2\cdot 45^2 = 4\,050\ \text{mm}^2 .$$

- A keresztmetszet C pontjában: $S_{1z}(y_C = +b) = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{2b}{2}\right)^2 - b^2\right] = 0$

$$\sigma_x(C) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_c = \frac{M_{hz}}{I_z}(+b) = \frac{-6,4\cdot 10^6}{2\,733\,750} 45 = -105,35\ \text{MPa}; \qquad \tau_{xy} = 0\ \text{MPa}.$$

- A keresztmetszet S pontjában: $S_{1z}(y_S = 0) = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{2b}{2}\right)^2 - 0\right] = \frac{b^3}{2}$

$$\sigma_x(S) = 0\ \text{MPa}; \qquad \tau_{xy}(S) = -\frac{3}{2}\frac{T_y}{A} = -\frac{3}{2}\frac{(-16\,000)}{4\,050} = 5,925\ \text{MPa}.$$

- A keresztmetszet D pontjában: $S_{1z}(y_D) = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{2b}{2}\right)^2 - y_D^2\right] = 34\,171,875\ \text{mm}^3$

$$\sigma_x(D) = \frac{M_{hz}}{I_z} y_D = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{b}{2}\right) = \frac{-6,4\cdot 10^6}{2\,733\,750}\left(-\frac{45}{2}\right) = 52,67\ \text{MPa};$$

$$\tau_{xy}(D) = -\frac{T_y S_z(y_D)}{I_z a(y_D)} = -\frac{T_y S_z(y_D)}{I_z b} = -\frac{-16\cdot 10^3 \cdot 34\,171,875}{2\,733\,750\cdot 45} = 4,44\ \text{MPa}.$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_C\right] = \begin{bmatrix} -105,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \left[\underline{\underline{F}}_S\right] = \begin{bmatrix} 0 & 5,925 & 0 \\ 5,925 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \left[\underline{\underline{F}}_D\right] = \begin{bmatrix} 52,67 & 4,44 & 0 \\ 4,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

d) A tartó szilárdságtani ellenőrzése a HMH elmélet szerint:

Általános összefüggés: $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \beta\tau_{xy}^2}$, ahol β=3.

- A keresztmetszet C pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(C) = \sqrt{\sigma_x^2(C) + 3\tau_{xy}^2(C)} = \sqrt{(-105,35)^2 + 3(0)^2} = 105,35\ \mathrm{MPa}.$$

- A keresztmetszet S pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(S) = \sqrt{\sigma_x^2(S) + 3\tau_{xy}^2(S)} = \sqrt{(0)^2 + 3(5,925)^2} = 10,27\ \mathrm{MPa}.$$

- A keresztmetszet D pontjában a redukált feszültség:

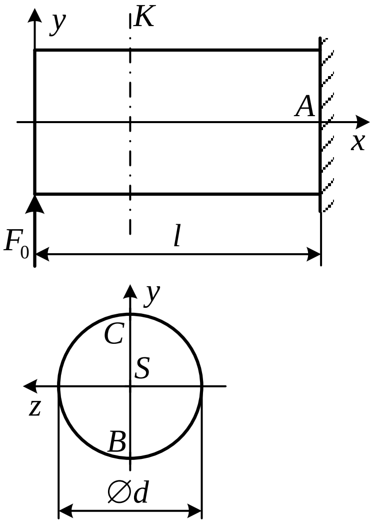
$$\sigma_{red}(D) = \sqrt{\sigma_x^2(D) + 3\tau_{xy}^2(D)} = \sqrt{(52,67)^2 + 3(4,44)^2} = 53,23\ \mathrm{MPa}.$$

A maximális redukált feszültség a C pontban ébred.

$\sigma_{red\,\max}(C) = 105,35\ \mathrm{MPa} < \sigma_{meg} = 125\ \mathrm{MPa}$ A tartó szilárdságtanilag megfelel!

12.2. Prizmatikus rúd összetett igénybevétele (nyírás és hajlítás)

Adott: $R_{p0,2} = 80\,\text{MPa}$, $n = 1{,}3$, $F_0 = 30\,\text{kN}$, $l = 0{,}2\,\text{m}$.

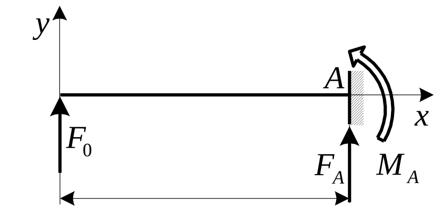


Feladat:

a) Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat és határozza meg a veszélyes keresztmetszetet!
b) Rajzolja meg a feszültségeloszlást a veszélyes keresztmetszet S súlypontján átmenő y és z tengelye mentén!
c) Végezze el a tartó szilárdságtani ellenőrzését a *MOHR* elmélet szerint (méretezés hajlításra, szilárdságtani ellenőrzés hajlításra és nyírásra)!

Megoldás:

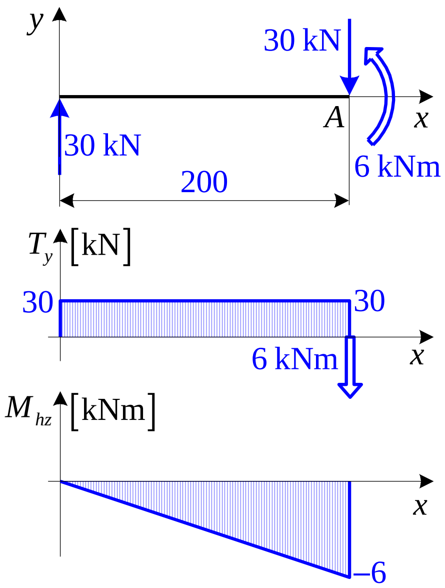
a) Igénybevételi ábrák, a tartó veszélyes keresztmetszete:



Támasztó erőrendszer:

$F_y = F_0 + F_A = 0, \quad \Rightarrow \quad F_A = -30\,\text{kN}\,(\downarrow),$

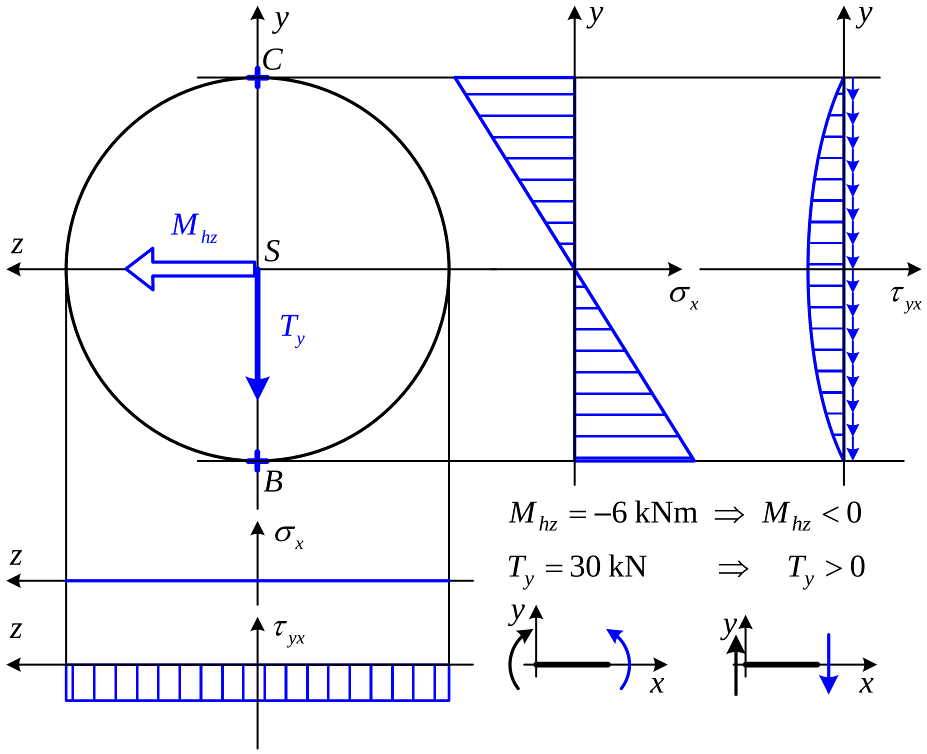
$M_a = M_A - F_0 l = 0, \quad \Rightarrow \quad M_A = 6\,\text{kNm}\,(\circlearrowright).$



b) A tartó veszélyes keresztmetszete:

A tartó befalazási A jelű keresztmetszete.

c) Feszültségeloszlás a veszélyes keresztmetszet y és z tengelye mentén:



d) A tartó szilárdságtani ellenőrzése a MOHR elmélet szerint:

$$\sigma_{x\max} = |\sigma_x(B)| = |\sigma_x(C)| = \frac{|M_{hz}|}{I_z}|y_{\max}| = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \le \sigma_{meg}$$

$$\sigma_{meg} = \frac{R_{p0,2}}{n} = \frac{80}{1{,}3} = 61{,}53\ \text{MPa}, \quad K_z = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{d^3\pi}{32}.$$

$$\frac{|M_{hz}|}{K_z} \le \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad \frac{32|M_{hz}|}{d^3\pi} \le \sigma_{meg} \quad \Rightarrow \quad \frac{32|M_{hz}|}{\sigma_{meg}\pi} \le d^3 \quad \Rightarrow$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32|M_{hz}|}{\sigma_{meg}\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot 6\cdot 10^6}{61{,}53\cdot\pi}} = 99{,}73\ \text{mm}.$$

A tartó átmérője (kerekítés után, a nagyobb biztonság felé térve): $d = 100$ mm.

A keresztmetszeti jellemzők a választott átmérővel:

$$I_z = \frac{d^4\pi}{64} = \frac{100^4\pi}{64} = 4\,908\,738\ \text{mm}^4, \quad A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{100^2\pi}{4} = 7\,854\ \text{mm}^2.$$

- A keresztmetszet C pontjában:

$$\sigma_x(C)=\frac{M_{hz}}{I_z}y_C=\frac{M_{hz}}{I_z}\left(+\frac{d}{2}\right)=\frac{-6\cdot10^6}{4\,908\,738}50=-61{,}11\,\text{MPa}\,; \qquad \tau_{xy}=0\,\text{MPa}\,.$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_C\right]=\begin{bmatrix}-61{,}11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{MPa}\,.$$

- A keresztmetszet S pontjában:

$$\sigma_x(S)=0\,\text{MPa}\,; \qquad \tau_{xy}(S)=-\frac{4}{3}\frac{T_y}{A}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{30\cdot10^3}{7\,854}=-5{,}09\,\text{MPa}\,.$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_S\right]=\begin{bmatrix}0 & -5{,}09 & 0\\ -5{,}09 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{MPa}\,.$$

- A keresztmetszet B pontjában:

$$\sigma_x(B)=\frac{M_{hz}}{I_z}y_C=\frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{d}{2}\right)=\frac{-6\cdot10^6}{4\,908\,738}(-50)=61{,}11\,\text{MPa}\,; \qquad \tau_{xy}=0\,\text{MPa}\,.$$

$$\left[\underline{\underline{F}}_B\right]=\begin{bmatrix}61{,}11 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\text{MPa}\,.$$

Általános összefüggés: $\sigma_{red}=\sqrt{\sigma_x^2+\beta\tau_{xy}^2}$, MOHR: $\beta=4$.

- A keresztmetszet C pontjában a redukált feszültség a MOHR elmélet szerint:

$$\sigma_{red}(C)=\sqrt{\sigma_x^2(C)+\beta\tau_{xy}^2(C)}=\sqrt{(-61{,}11)^2+4\cdot(0)^2}=61{,}11\,\text{MPa}\,,$$

- A keresztmetszet S pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(S)=\sqrt{\sigma_x^2(S)+\beta\tau_{xy}^2(S)}=\sqrt{(0)^2+4\cdot(-5{,}09)^2}=10{,}18\,\text{MPa}\,,$$

- A keresztmetszet B pontjában a redukált feszültség:

$$\sigma_{red}(B)=\sqrt{\sigma_x^2(B)+\beta\tau_{xy}^2(B)}=\sqrt{(61{,}11)^2+4\cdot(0)^2}=61{,}11\,\text{MPa}\,.$$

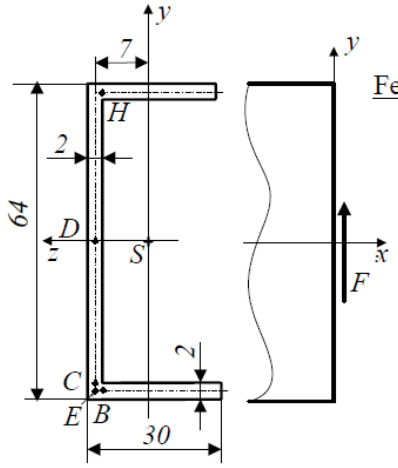
A maximális redukált feszültség a C és a B pontokban ébred, és mivel

$$\sigma_{red}(C)=\sigma_{red}(C)=61{,}11\,\text{MPa} \quad < \quad \sigma_{meg}(C)=61{,}53\,\text{MPa}$$

így a tartó szilárdságtanilag megfelel.

12.3 feladat : ***Vékony szelvényű rudak nyírása és hajlítása***

<u>Adott</u> : $\vec{F} = \left(2\,\vec{j}\right) kN$ *és a keresztmetszet méretei.*



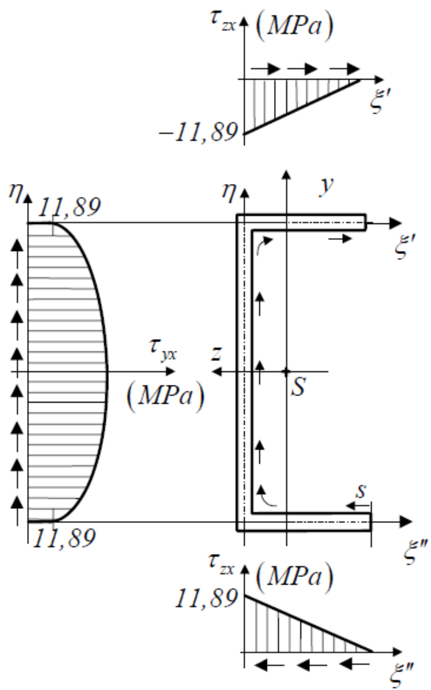
<u>Feladat</u> : *a) A feszültségeloszlások megrajzolása a középvonal mentén.*
b) A feszültségkoordináták meghatározása az övlemez, illetve a gerinclemez B, E, C, D,H pontjaiban.
c) A Q nyírási középpont meghatározása.

a) A feszültségeloszlások a középvonal mentén :

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka a z tengelyre

$$I_z = \int_{(A)} y^2 dA = \int_{(l)} y^2 v ds = y^2_{|y=-31} v \int_{s=0}^{29} ds + v \int_{s=29}^{91} \left(s-60\right)^2 ds + y^2_{|y=31} v \int_{s=91}^{120} ds,$$

$$I_z = \left(-31\right)^2 \cdot 2 \cdot 29 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{31^3}{3} + 31^2 \cdot 2 \cdot \left(120-29\right) = 151{,}2 \cdot 10^3 \ mm^4 .$$



Elsőként a sarokpontban (***E***) ébredő csúsztató feszültséget határozzuk meg :

$$\left|\tau_{zx}\left(E\right)\right| = \left|\tau_{yx}\left(E\right)\right| = \left|\frac{T_y\, S_z\left(s_E\right)}{I_z\, v}\right|,$$

$$S_z\left(s_E\right) = \int_{(A)} y\, dA = \int_{(l)} y\, v ds = y_{|y=-31} v \int_{(s=0)}^{(29)} ds,$$

$$S_z\left(s_E\right) = \left(-31\right) \cdot 2 \cdot 29 = -1798\, mm^3 .$$

$$T_y = -2000\, N. \qquad \tau_y < 0$$

$$\left|\tau_{zx}\left(E\right)\right| = \left|\tau_{yx}\left(E\right)\right| = \left|\frac{\left(-2000\right)\cdot\left(-1798\right)}{151200 \cdot 2}\right| = 11{,}89\, MPa.$$

Az övlemezekben ébredő nyírófeszültség előjelét a nyírófolyam irányítása alapján határozhatjuk meg.

b) A feszültségkoordináták az övlemez, illetve a gerinclemez B,C,D,H pontjaiban.

▪***B*** pontban : $\tau_{ex}\left(B\right) = \tau_{zx}\left(B\right) = \dfrac{T_y\, S_z\left(s_B\right)}{I_z\, v},$

$$S_z(s_B) = \int_{(A)} y\,dA = \int_{(l)} y\,v\,ds = y_{|y=-31} v \int_{(s=0)}^{(28)} ds = (-31)\cdot 2\cdot 28 = -1736\,mm^3.$$

$$\tau_{ex}(B) = \tau_{zx}(B) = \frac{T_y S_z(s_B)}{I_z v} = \frac{(-2000)\cdot(-1736)}{151200\cdot 2} = 11{,}48\,MPa.$$

▪**C** pontban : $\tau_{ex}(C) = \tau_{yx}(C) = \dfrac{T_y S_z(s_C)}{I_z v}$,

$$S_z(s_C) = \int_{(A)} y\,dA = (-31)\cdot 2\cdot 30 = -1860\,mm^3.$$

$$\tau_{ex}(C) = \tau_{yx}(C) = \frac{T_y S_z(s_C)}{I_z v} = \frac{(-2000)\cdot(-1860)}{151200\cdot 2} = 12{,}3\,MPa.$$

▪**D** pontban : $\tau_{ex}(D) = \tau_{yx}(D) = \dfrac{T_y S_z(s_D)}{I_z v}$,

$$S_z(s_D) = \int_{(A)} y\,dA = (-31)\cdot 2\cdot 28 + (-16)\cdot 2\cdot 32 = -2760\,mm^3.$$

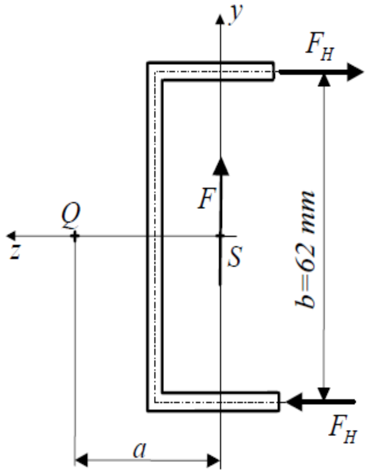
$$\tau_{ex}(D) = \tau_{zx}(D) = \frac{T_y S_z(s_D)}{I_z v} = \frac{(-2000)\cdot(-2760)}{151200\cdot 2} = 18{,}25\,MPa.$$

▪**H** pontban : $\tau_{ex}(H) = \tau_{(-z)x}(H) = -\tau_{zx}(H) = -\dfrac{T_y S_z(s_H)}{I_z v}$,

$$S_z(s_H) = \int_{(A)} y\,dA = (-31)\cdot 2\cdot 28 + (0)\cdot 2\cdot 64 = -1736\,mm^3.$$

$$\tau_{ex}(H) = -\tau_{zx}(H) = -\frac{T_y S_z(s_H)}{I_z v} = -\frac{(-2000)\cdot(-1736)}{151200\cdot 2} = -11{,}48\,MPa.$$

c) A Q nyírási középpont :



A feszültségi eredő y tengely irányában: $F=2000\,N$.
A feszültségi eredő z tengely irányában:

$$F_H = \int_{s=0}^{29} \tau_{zx}\,v\,ds = \frac{1}{2} 11{,}89\cdot 2\cdot 29 = 344{,}81N\ .$$

A feszültségi eredők nyomatéka a Q ponti tengelyre:
$M_q = F\,a - F_H b = 0.$

A **Q** nyírási középpont a távolsága :

$$a = b\frac{F_H}{F} = 62\frac{344{,}81}{2000} = 10{,}69\,mm.$$